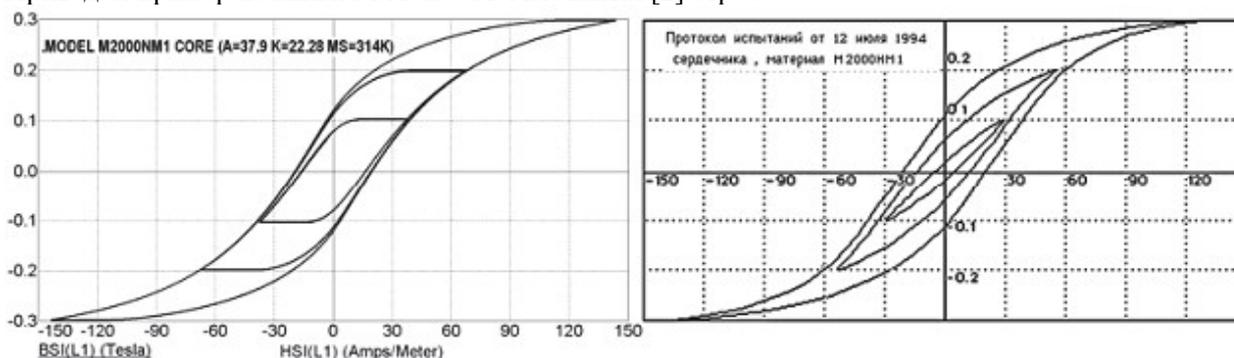


Упрощение модели Джилса-Атертона для симуляции магнитномягких материалов в Spice-симуляторах

Модель намагничивания магнитномягких материалов, предложенная Д. Джилсом и Д. Атертоном (далее просто JA) [1], весьма часто применяется во многих коммерческих программах Spice-симуляторов. Своеобразные параметры описания свойств ферромагнетиков, использованные авторами, в этих программах получаются с помощью подпрограмм оптимизации, переводящими известные справочные или экспериментальные данные на “язык” модели. Тем не менее результаты моделирования нередко выглядят не слишком убедительно. В Микрокап, например, удивляет форма частных циклов гистерезиса, которые никак не соответствуют экспериментальным данным. Приведем пример из книги М.А. и С.А. Амелиных [2] стр. 476



Модельные и экспериментальные петли гистерезиса

Разумеется, что у пытливого пользователя возникает желание разобраться в причинах такого несоответствия и поискать возможности улучшения картины. Но алгоритмы реализации модели и процедуры оптимизации параметров скрыты в программе и практически недоступны для него. Поэтому есть определенный резон создать альтернативный механизм анализа модели JA, построенный на базе собственных возможностей Микрокап. Для начала обратимся к самой модели JA.

Основная идея модели JA состоит в том, что общая намагниченность M ферромагнетика рассматривается как сумма трех компонентов:

- безгистерезисной намагниченности M_{an} ,
- обратимой (реверсивной) намагниченности M_{rev} ,
- необратимой (нереверсивной) намагниченности M_{irr} .

Величина намагниченности M ферромагнетика, находящегося во внешнем магнитном поле с напряженностью H , зависит величины эквивалентного внутреннего поля H_e равного

$$H_e = H + \alpha M \quad (1)$$

где α – коэффициент, учитывающий эффект взаимодействия внешнего магнитного поля с внутренним, созданным намагниченностью материала M . Величина безгистерезисной намагниченности M_{an} записывается в виде функции

$$M_{an} = M_s \cdot f(H_e) \quad (2)$$

где M_s – намагниченность насыщения, а $f(H_e)$ – некоторая функция, равная нулю при $H_e = 0$ и единице при H_e стремящемся в бесконечность.

На тему формул (1) и (2) стоит поговорить подробнее. Под безгистерезисной намагниченностью M_{an} понимается намагниченность тела, возникающая при одновременном воздействии на него постоянным магнитным полем с наложенным на него убывающим до нуля переменным магнитным полем. При этом доменная структура приходит в состояние термодинамического равновесия с наименьшей энергией. Нулевому значению постоянного поля соответствует полная размагниченность. Зависимость намагниченности от приложенного постоянного поля в этом случае носит название кривой безгистерезисного или идеального намагничивания. Ее не следует путать с кривой начального намагничивания, которая получается при намагничивании полностью размагниченного тела медленно возрастающим магнитным полем. Характер поведения обеих кривых представлен на следующем рисунке:

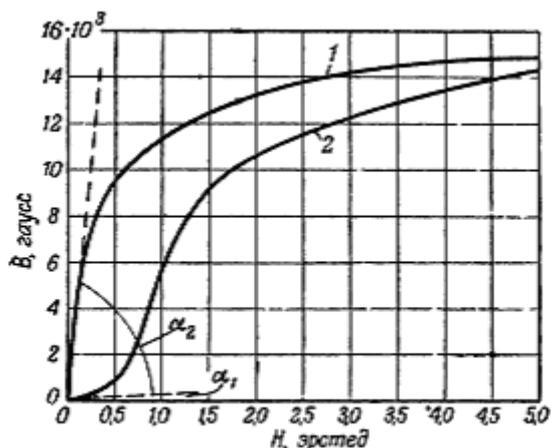


Рис.2 Кривые безгистерезисного (1) и начального (2) намагничивания железа

В качестве функции $f(H_e)$ JA предложили использовать модифицированную функцию Ланжевина:

$$\mathbf{f}(x) = \coth(x) - 1/x \quad (3)$$

Соответственно кривая безгистерезисного намагничивания по JA описывается выражением:

$$M_{an} = M_s \cdot \coth(H_e/A) - (A/H_e) \quad (4)$$

Серьезным недостатком функции (4) является то, что она имеет разрыв при нулевом значении аргумента. По этой причине при использовании модели JA в Spice-симуляторах в малой окрестности нуля функция $\mathbf{f}(x)$ заменяется приближением:

$$\text{Если } H_e/A < 0.1 \rightarrow M_{an} = M_s \cdot H_e/3A, \quad (5)$$

$$\text{Если } H_e/A > 0.1 \rightarrow M_{an} = M_s \cdot \coth(H_e/A) - (A/H_e) \quad (6)$$

Эта подмена решает проблему разрыва, но, тем не менее, трудности в сходимости могут встречаться.

В качестве альтернативы $\mathbf{f}(x)$ возможно применение простых функций, имеющих схожую форму кривой, но свободных от затруднений со сходимостью. Такими функциями могут быть

$$y = x / x + 1 \text{ или } y = (2 / \pi) \cdot \text{Atan}(x)$$

Сравнение трех возможных кривых, описывающих траекторию безгистерезисного намагничивания, приведено на следующем рисунке

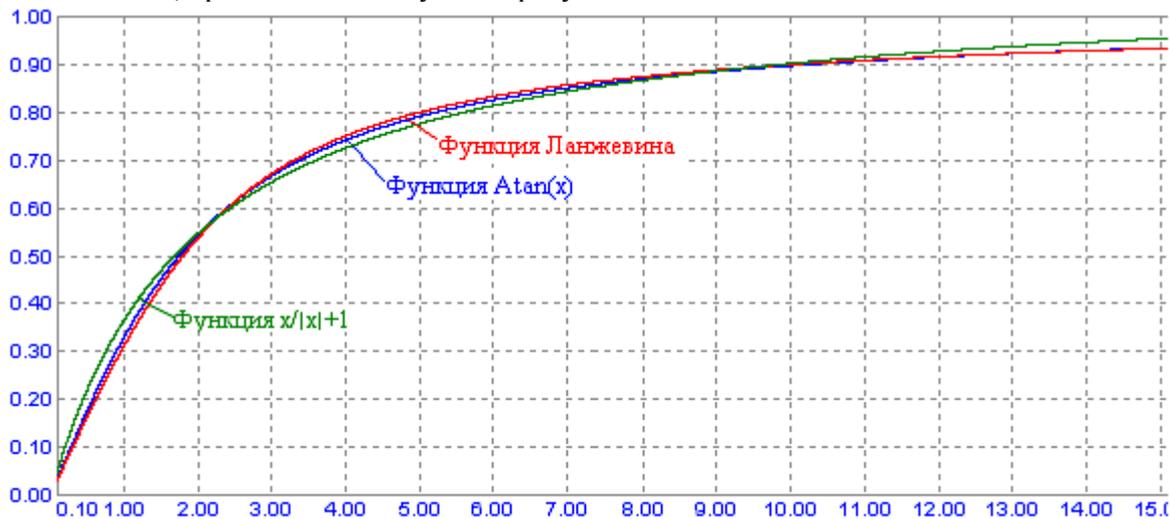


Рис.3 Сравнение вариантов получения кривой безгистерезисного намагничивания

Приведенные кривые для функций $y = (2 / \pi) \cdot \text{Atan}(x)$ и $y = x / x + 1$ предварительно отмасштабированы для достижения наилучшего приближения к модифицированной функции Ланжевина. Как видно из рисунка, наименьшее отличие имеет функция $y = (2/\pi) \cdot \text{Atan}(x)$, которая будет использована в дальнейшем для упрощения модели JA. Заметим также, что функция $y = x / x + 1$ используется в модели Чана [3], встроенной в симулятор SwCad. В [2] на стр. 478 говорится, что эта функция использована также и в модели насыщаемого сердечника симулятора Микрокап.

Таким образом, безгистерезисная кривая в нашем упрощении модели JA будет записываться как:

$$M_{an} = M_s \cdot (2/\pi) \cdot A \tan(Hc/A) \quad (7)$$

Здесь, как и ранее в (4), (5), (6) коэффициент A суть масштабный множитель, с помощью которого меняется наклон относительно линейной части безгистерезисной кривой M_{an} . Его величина выбирается таким образом, чтобы M_{an} проходила через точки с координатами (0,0) и (Hc, Br) , где Hc и Br – стандартные параметры ферромагнитного материала, приводимые в справочных данных, т.е. соответственно коэрцитивная сила и остаточная индукция. Величина Br/Hc есть не что иное, как относительная динамическая проницаемость в линейной части предельного цикла намагничивания. В системе СИ это может быть записано как:

$$\mu_{nu} = (1/\mu_0) \cdot (Br/Hc) = 79.61 \cdot 10^4 \cdot Br/Hc \quad (8)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – проницаемость свободного пространства.

Величина A может быть определена из выражения

$$A \approx Hc / \tan(\pi \cdot Br / (2Bs)) \quad (9)$$

где Bs – индукция технического насыщения материала сердечника по справочным данным. Намагниченность насыщения M_s в вышеприведенных формулах вычисляется как:

$$M_s = Bs / \mu_0 \quad (10)$$

Знак приближительного равенства в (9) означает, что вычисленная по этой формуле величина A носит предварительный характер и требует уточнения в процессе отладки модели.

Обратимся, наконец, к формуле (1), описывающей величину внутреннего магнитного поля в сердечнике. Входящий в нее коэффициент α имеет величину порядка $1/\mu_{nu}$, т.е. $10^{-4} \dots 10^{-3}$ и вклад внутренней намагниченности в общую намагниченность не является преобладающим. Это можно объяснить тем, что в пределах одного домена ферромагнетик находится в состоянии насыщения, т.е. векторы магнитных моментов всех его магнитных “зарядов” коллинеарны. Поэтому изменение намагниченности тела под действием внешнего магнитного поля возможно только за счет перемещения и изгиба стенок доменов или поворота вектора магнитного момента домена. В силу этого способность ферромагнитного сердечника накапливать и отдавать магнитную энергию по крайней мере в пределах относительно линейной части кривой намагничивания в основном пропорциональна внешнему полю и составляющей внутреннего поля при моделировании можно пренебречь. Возникающие при этом ошибки в значительной мере можно скорректировать в процессе отладки модели намагничивания. В этом аспекте стоит обратить внимание на то, что введенный JA в начале статьи [1] показатель He как-то незаметно исчезает из текста и окончательное уравнение модели в качестве независимой переменной содержит только H . В [2] уже без реверансов открытым текстом со ссылкой на Pspice уравнение модели JA записывается через H . Последуем примеру взрослых и умных дядей и в нашем упрощении будем считать, что $\alpha=0$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение, описывающее гистерезис в модели JA.

$$\frac{dM}{dH} = \frac{1}{(1+c)} \frac{1}{\delta k / \mu_0 - \alpha (M_{an} - M)} (M_{an} - M) + \frac{c}{(1+c)} \frac{dM_{an}}{dH}. \quad (11)$$

где $\delta = 1$, если $dH/dt > 0$, и $\delta = -1$, если $dH/dt < 0$.

Это конечное выражение, полученное после проведенных преобразований. Оно представляет собой сумму двух уравнений:

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{1}{\delta k / \mu_0 - \alpha (M_{an} - M_{irr})} (M_{an} - M_{irr}), \quad (12)$$

и

$$dM_{rev}/dH = c(dM_{an}/dH - dM/dH). \quad (13)$$

Формулы (11), (12), (13) воспроизведены по авторскому тексту [1]. Дифференциальное уравнение (12) описывает необратимый компонент намагничивания, а уравнение (13) обратимый. Сумма этих двух компонентов по JA дает величину общего намагничивания

$$M = M_{irr} + M_{rev}. \quad (14)$$

Обратим внимание на множители $\frac{1}{1+c}$ и $\frac{c}{1+c}$ слагаемых правой части уравнения (11),

которые в сумме они дают единицу:

$$\frac{1}{1+c} + \frac{c}{1+c} = \frac{1+c}{1+c} = 1 \quad (15)$$

То есть, пара этих множителей по существу не более, чем весовые коэффициенты, учитывающие вклад каждого из слагаемых в общую сумму. Величину c авторы JA предлагают рассчитывать довольно мутным способом через экспериментальное определение отношения дифференциальных восприимчивостей начальной и безгистерезисной кривых намагничивания:

$$c = \chi'_{0norm} / \chi'_{0anhys}$$

Однако, учитывая, что после странноватых кульбитов с производными кривых восприимчивости мы в итоге получим всего лишь весовые коэффициенты для первого и второго слагаемых формулы (11), гораздо проще пойти по пути ручного подбора величины c до получения удовлетворительного совпадения с априорными данными.

Из рассмотрения вышеупомянутых множителей следует еще один интересный вывод. Уравнение (11) говорит о том, что в модели JA процесс намагничивания по существу представлен как сумма двух частей, одна из которых содержит информацию о гистерезисной части в виде разности между безгистерезисной намагниченностью Man и общей намагниченностью M , а вторая несет информацию о безгистерезисной составляющей процесса. В силу этого весовые коэффициенты слагаемых (11) удобно представить в виде

$$C + (1-C) = 1 \quad (16)$$

где C – формальный коэффициент, подбираемый при отладке модели по наилучшему совпадению параметров петли гистерезиса с опытными или справочными данными. Учитывая, что мы обнулили величину α , уравнение (11) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dM}{dH} = \delta \frac{(1-C) \times (Man - M)}{k / \mu_0} + C \frac{dMan}{dH} \quad (17)$$

Гистерезисные потери энергии на перемагничивание сердечника зависят от параметра k / μ_0 в уравнении (11) и соответственно определяют ширину петли гистерезиса. Для удобства записи заменим k / μ_0 на K , величина которого приблизительно равна Hc . Его реальное значение определим в процессе подгонки модели. В итоге приходим к упрощенному выражению модели JA:

$$\frac{dM}{dH} = \delta \frac{(1-C) \times (Man - M)}{K} + C \frac{dMan}{dH} \quad (18)$$

В этой записи нет ничего нового. Практически такую же форму представления модели JA мы можем видеть на стр. 478 в[2]. Различие только в способе представления весовых коэффициентов.

Проинтегрировав левую и правую части (18) по dH , получим:

$$M = \int \delta \frac{(1-C) \times (Man - M)}{K} dH + C \times Man \quad (19)$$

или иначе:

$$M = \delta \frac{1-C}{K} \int (Man - M) dH + C \times Man \quad (19a)$$

В Spice-симуляторах единственной естественной переменной является время t . Поэтому все моделируемые процессы и выполняемые преобразования входящих величин должны рассматриваться как функции времени. Нетрудно видеть, что входящие в (19) или (19a) функциональные величины зависят от времени. При симуляции индуктивности с насыщающимся сердечником напряженность намагничивающего поля H зависит от изменяющегося во времени тока намагничивания. Соответственно намагниченности всех видов также суть функции времени. Выполним одно формальное действие над подынтегральным выражением – умножим и разделим его на dt . В результате получим:

$$M = \delta \frac{1-C}{K} \int (Man - M) \frac{dH}{dt} dt + C \times Man \quad (20)$$

Теперь подынтегральное выражение в первом слагаемом (20) содержит произведение ($Man-M$) на производную по времени dH/dt и стало быть доступно для прямого интегрирования в Spice-симуляторе, чем дальше и займемся.

Модель JA в Spice-симуляторах (далее речь пойдет только о Микрокап) служит для моделирования индуктивных элементов с насыщаемым сердечником. Вычисление выражения (20), реализующего модель JA, поясняется блок-схемой на рис. 4

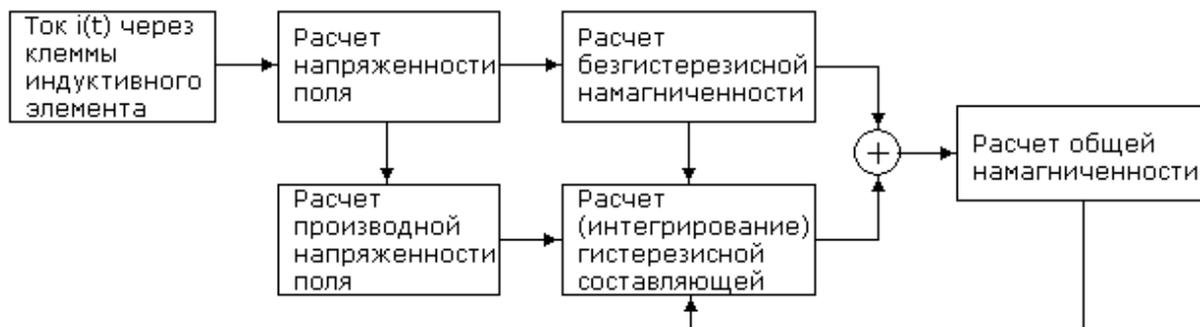


Рис. 4 Алгоритм реализации модели Джилса-Атертона

Заметим, что в этой схеме для гистерезисной составляющей через производную напряженности поля действует положительная обратная связь. Поэтому при усложнении модели для учета внутреннего поля ферромагнетика процесс вычисления может оказаться расходящимся.

Расчет напряженности намагничивающего поля H производится по формуле:

$$H = \frac{i(t) \times N}{Len} \quad (21)$$

где $i(t)$ – ток через обмотку индуктивного элемента с насыщающимся сердечником,

N – число витков,

Len – средняя длина магнитной линии в сердечнике в [см] (рассматривается сердечник без зазора). Spice-директива для вычисления:

```
.Define H {100*i (...) *N/Len}
```

В круглых скобках указывается имя элемента, используемого в качестве датчика тока.

Вычисление безгистерезисной намагниченности Man производится по формуле (7) с подстановкой (10):

$$Man = \frac{2Bs}{\pi \times \mu_0} \text{Atan} \left(\frac{H}{A} \right) \quad (22)$$

Предварительное значение масштабного коэффициента $A=25$. Spice-директива для вычисления:

```
.Define Man { (2*Bs/pi*mu0) *Atan (H/A) }
```

Вычисление производной dH/dt может быть выполнено двумя способами: либо с помощью командной строки, либо путем создания схемного элемента, производящего это преобразование. Соответствующая Spice-директива в случае использования командной строки:

```
.Define dHdt {ddt (H) }
```

В случае использования схемного элемента для дифференцирования H применяется генератор тока, нагруженный на единичную индуктивность согласно схеме рис. 5:

Входной ток $i(t)$

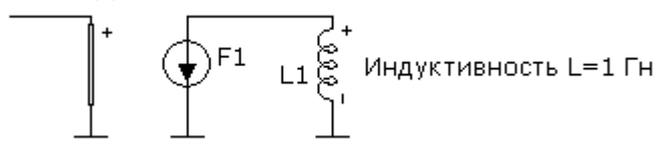


Рис. 5 Дифференцирующий схемный элемент

В основе работы этого схемного элемента лежит известное соотношение, связывающее напряжение на индуктивности с величиной протекающего тока:

$$v(L) = L \frac{di}{dt}$$

Если величина индуктивности равна 1 Гн, то напряжение на индуктивности равно производной протекающего тока. По найденному значению производной входного тока di/dt вычисляется dH/dt согласно Spice-директиве:

```
.Define dHdt {(100/Len)*v(L1)*N}
```

Для записи подынтегрального выражения формулы (20) используется Spice-директива

```
.Define prM1 {(del*(1-C)(Man-M)/K)*dHdt}
```

Коммутационный множитель δ формулы (20) задается условным оператором

```
.Define del IF (dHdt>0,1,-1)
```

Для вычисления интеграла в формуле (20) используется схемный элемент, показанный на рис. 6. Он состоит из функционального генератора тока и единичного конденсатора, шунтированного резистором большой величины.

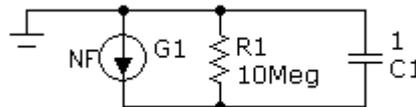


Рис. 6 Интегрирующий схемный элемент

При емкости конденсатора 1 Ф величина напряжения на нем равна

$$v(C1) = \int i(t)dt$$

Если в качестве выражения в функциональном генераторе тока записать подынтегральное выражение $prMI$ формулы (20), то напряжение $v(C1)$ будет равно величине интеграла, которую мы обозначили как MI .

Полная величина намагниченности равна $M = MI + C \cdot Man$, что записывается Spice-директивой

```
.Define M {M1+C*M}
```

Индукция в сердечнике вычисляется по формуле $B = \mu_0 \times M$. Этому соответствует Spice-директива

```
.Define B {mu0*M}
```

Для вычисления ЭДС, возникающей в обмотке катушки индуктивности с насыщающимся сердечником, необходимо продифференцировать B . Это выполняется с помощью еще одного дифференцирующего схемного элемента, аналогичного показанному на рис.5. Управляющим выражением для него служит B . Полученное значение используется в управляющем выражении функционального генератора напряжения, имитирующего ответную реакцию индуктивности. Spice-директивой этого этапа является:

```
.Define EDS {v(L2)*Are*N*1e-4}
```

В заключение отметим, что представленный вариант упрощения модели JA не слишком нужен непосредственно в Микрокап, где имеется штатная реализация этой модели. Но он может быть полезным для тех пользователей, которые желают более подробно изучить эту модель и попытаться своими силами усовершенствовать ее. Отметим также, что не следует ожидать точного соответствия модельных оценок с результатами эксперимента.

Ссылки

1. D.C.JILES & D.L.ATHERTON, "Theory of Ferromagnetic Hysteresis", JMMM, 61, 1986, 48-60
Есть перевод <http://yadi.sk/d/n6eg3AzJJHYzm>
2. М.С. Амелина, С.А. Амелин, "Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap. Версии 9, 10" 2012

Приложение

Скриншот схемы упрощенной модели Джилса-Атертона. Файл действующей модели можно скачать по ссылке <http://yadi.sk/d/PNFzIzkjJHWGw>

Приложение

